О Т З Ы В

официального оппонента о диссертации Коваль Карины Александровны «Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения», представленной на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В математической физике часто рассматривают такие задачи в областях с негладкими границами, когда на одной части границы области задают краевое условие Дирихле, на другой – условие Неймана, а на третьей – условие третьего рода или так называемое условие Ньютона. Задачи подобного вида называют смешанными. Для исследования слабых решений этих задач можно использовать обобщённую формулу Грина для смешанных краевых задач, доказанную Н.Д. Копачевским. В ней функционал, связанный с границей области, разбит на сумму функционалов, отвечающих тому или иному краевому условию.

Диссертационная работа К.А. Коваль посвящена разработке общей схемы решения смешанных краевых задач сопряжения для разных конфигураций областей с липшицевыми границами. Эта схема применена также для спектральных и начально-краевых задач. Схема заключается в том, что решение неоднородной задачи сопряжения ищется в виде суперпозиции достаточно простых вспомогательных краевых задач, содержащих заданную функцию лишь в одном из краевых условий.

Диссертация состоит из трёх глав.

В первой главе приведены обобщённые формулы Грина, которые используются в работе. На их основе рассматривается общая схема изучения краевых задач сначала на примере абстрактной краевой задачи сопряжения для конфигурации из трёх областей, а затем и для задачи математической физики для конфигурации, которая названа «дважды разрезанный банан». На этом пути, с помощью соответствующих обобщённых формул Грина, доказывается, что решением исходной краевой задачи сопряжения является сумма решений четырёх вспомогательных задач (Зарембы, Стеклова, двух задач С.Г. Крейна). Затем эта схема реализована и на других примерах конфигураций пристыкованных липшицевых областей.

Вторая глава посвящена применению аналогичного подхода к спектральным задачам сопряжения для одной, двух и трёх примыкающих областей. Сначала подробно изучается спектральная проблема для одной области Ω из R^m с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$. С помощью общего подхода, описанного ранее, задача разбивается на четыре вспомогательные, содержащие заданную функцию лишь на одном куске границы. Это позволяет ввести операторы вспомогательных задач и на этой основе найти слабые решения каждой из задач. В итоге получается уравнение, которому удовлетворяет решение исходной задачи. Затем отсюда осуществляется переход к спектральной задаче

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0,\ v \in L_2(\Omega), \quad (1)$$
$$A^{-1} > 0, \qquad B_k = B_k^*, \qquad k > 0, \qquad B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), k = \overline{2,4},$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с комплексными параметрами λ и μ. Далее, изучаются свойства собственных значений и корневых векторов пучка (1). При этом один из параметров считается спектральным, другой – фиксированным. Аналогичные спектральные задачи изучены для двух и трёх примыкающих областей. Итогом их рассмотрения является такой же пучок вида (1), как в случае с одной областью.

В третьей главе общая схема исследования применена к начально–краевым задачам, которые порождают спектральные. Рассмотрены четыре типа разных задач, в которых производные по времени входят не только в уравнения, но и в краевые условия. Для каждого типа осуществлён переход к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве, а затем на этой основе доказано существование её сильного (по времени) решения. Разобраны также аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Они приводятся к таким же задачам Коши, как и в случае с одной областью. Поэтому для них справедливы аналогичные теоремы о сильной разрешимости.

Основное достижение данной работы состоит в том, что сформулированный общий подход является достаточно универсальным. Методы доказательств таковы, что аналогичные построения можно провести на базе обобщённых формул Грина для равномерно эллиптического выражения, для соответствующих дифференциальных выражений из теории упругости и гидродинамики и др.

Отдельно хочу отметить тщательную подборку рассматриваемых в диссертации задач, каждая из которых является обобщением и развитием полученных ранее результатов.

Все полученные автором результаты являются новыми. Работа написана аккуратно и подробно. Все сформулированные в диссертации результаты снабжены полными доказательствами.

Замечания.

- На с. 48 диссертации в формуле (1.44) необходимо заменить u_{23} на u_{13}.
- На с. 137 диссертации надо заменить (??)-(??) на (3.101)-(3.106).
- Недостаточно полно изложена история вопроса.
- Не очень подробно описан вывод формулы Грина для пространств Н со шляпками вверх и вниз.

Перечисленные замечания не влияют на общую положительную оценку работы, которая, безусловно, является законченным научным исследованием. Автор полностью решил поставленные перед ним задачи. Основные результаты К.А. Коваль полностью и своевременно опубликованы с соблюдением требований ВАК. Работа прошла апробацию на ряде научных семинаров и научных конференций. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Результаты, полученные в работе, подтверждают высокий квалификационный уровень К.А. Коваль как исследователя и свидетельствуют об уверенных знаниях автора в области дифференциальных уравнений. В ходе работы над диссертацией К.А. Коваль преодолела трудности идейного и технического характера.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа К.А. Коваль удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемых к кандидатским диссертациям, а её автор безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

профессор кафедры математического анализа,
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Власов

20. 04. 2018

Власов Виктор Валентинович
119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В.Ломоносова,
Главное здание, механико-математический факультет
Тел. +7 (495) 939-18-01,
e-mail: vikmont@yandex.ru

Подпись В.В.Власова заверяю